Compito di Geometria
Orvieto Luglio 2009

1. Sia $\mathcal{S}k_3(\mathbb{R})$ lo spazio di matrici di Markov 3 per 3, e cioè

$$\mathcal{S}k_3(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{array}{rcl} a_{11} + a_{21} + a_{31} & = & 1 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} & = & 1 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} & = & 1 \end{array} \right\}$$

   Sia tr : $\mathcal{S}k_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ Determinare la dimensione ed una base per Kertr.

2. Determinare lo spazio delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari (facendo uso dell'algoritmo di Gauss)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z - w - 2t & = & 0 \\ -2x + y + z - 2w + t & = & 0 \\ 2x - 2y + 5z - 5w & = & 0 \\ -2y + 8z - 8w - t & = & 0 \end{array} \right.$$

3. Determinare equazioni cartesiane di una retta r dello spazio passante per $P(0, -2, -1)$ ed intersecante le rette

$$s_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 3z & = & 1 \\ x + y + 4z & = & -1 \end{array} \right. \qquad s_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} y - 3z & = & -4 \\ x - y - 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

4. Determinare il punto di intersezione fra il piano perpendicolare all'asse delle z e passante per $P(2, 0, 1)$ e la retta per $Q(2, 0, 2)$ di parametri direttori $(3, -1, -1)$.

Soluzione

Esercizio 1

Una matrice simmetrica é della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Il nucleo dell'applicazione data é

$$\ker \operatorname{tr} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -a_{22} - a_{33} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \right\} =$$

$$= \left\{ a_{22} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Le matrici di questo sistema di generatori sono anche linearmente indipendenti (facile verifica) e quindi sono una base di $\ker \operatorname{tr}$ che risulta pertanto avere dimensione 5.

Esercizio 2

Usando l'algoritmo di Gauss si dimostra che la matrice dei coefficienti del sistema é equivalente alla matrice a scala per righe

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

Pertanto ha rango quattro e quindi il sistema dato ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1. Possiamo usare la t come parametro e risolvere tutte le equazioni del sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w - 2t & = & 0 \\ 3y + 2z - 4w + 2t & = & 0 \\ 4z - 3w - t & = & 0 \\ -11w + 8t & = & 0 \end{cases}$$

Da cui si ha

$$S_0 = \left\{ (\frac{95}{132}t, \frac{61}{66}t, \frac{35}{44}t, \frac{8}{11}t, t) \right\} = \langle (95, 122, 105, 96, 132) \rangle$$

Esercizio 3

La retta cercata é intersezione del piano π_1 contenente s_1 e P e del piano π_2 contenente s_2 e P.

Per determinare π_1 consideriamo il fascio di asse s_1:

$$\mathcal{F}_1 : 2x - y + z - 1 + \lambda(x + 3y + 3z + 2) = 0$$

imponendo il passaggio per P si ha

$$5 - \lambda = 0 \Leftarrow \lambda = 5$$

Quindi $\pi_1 : 7x + 14y + 16z + 9 = 0$.

Per determinare π_2 consideriamo il fascio di asse s_2:

$$\mathcal{F}_2 : y - 3z + 4 + \lambda(x - y - 2z) = 0$$

imponendo il passaggio per P si ha

$$6 + 6\lambda = 0 \Leftarrow \lambda = -1$$

Quindi $\pi_2 : -x + 2y - z + 4 = 0$. La retta cercata ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 7x + 14y + 16z + 9 & = & 0 \\ -x + 2y - z + 4 & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Un piano é perpendicolare all'asse delle x se i suoi parametri di giacitura sono uguali alle coordinate di un vettore non nullo parallelo all'asse delle x, quindi $(1, 0, 0)$. Pertanto i piani perpendicolari all'asse x hanno equazione $x = h$. Imponendo il passaggio per P si ottiene $\pi : x = 1$. La retta ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x & = & 2 + 2t \\ y & = & -3 \\ z & = & 2 - t \end{cases}$$

A questo punto é sufficiente mettere a sistema l'equazione del piano con le equazioni parametriche della retta ed eliminare il parametro t

$$\begin{cases} x & = & 1 \\ x & = & 2 + 2t \\ y & = & -3 \\ z & = & 2 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \\ y = -3 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Il punto cercato ha coordinate $(1, -3, \frac{5}{2})$