

## Compito di Geometria Orvieto 27 Febbraio 2008

1. Sia  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  lo spazio delle matrici simmetriche  $3 \times 3$ . Sia  $\text{tr} : \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ . Determinare la dimensione ed una base per  $\text{Ker tr}$ .
2. Determinare lo spazio delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari (facendo uso dell'algoritmo di Gauss)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w - 2t = 0 \\ -2x + y + z - 2w + t = 0 \\ 2x - 2y + 5z - 5w = 0 \\ -2y + 8z - 8w - t = 0 \end{cases}$$

3. Determinare equazioni cartesiane di una retta  $r$  dello spazio passante per  $P(3, -1, -1)$  ed intersecante le rette

$$s_1 : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y + 3z = -2 \end{cases} \quad s_2 : \begin{cases} y - 3z = -4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

4. Determinare il punto di intersezione fra il piano perpendicolare all'asse delle  $x$  e passante per  $P(1, 1, 1)$  e la retta per  $Q(2, -3, 2)$  di parametri direttori  $(2, 0, -1)$ .

## Soluzione

### Esercizio 1

Una matrice simmetrica é della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Il nucleo dell'applicazione data é

$$\begin{aligned} \ker \text{tr} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -a_{22} - a_{33} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \right\} = \\ &= \left\{ a_{22} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Le matrici di questo sistema di generatori sono anche linearmente indipendenti (facile verifica) e quindi sono una base di  $\ker \text{tr}$  che risulta pertanto avere dimensione 5.

### Esercizio 2

Usando l'algoritmo di Gauss si dimostra che la matrice dei coefficienti del sistema é equivalente alla matrice a scala per righe

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

Pertanto ha rango quattro e quindi il sistema dato ha uno spazio di soluzioni di dimensione 1. Possiamo usare la  $t$  come parametro e risolvere tutte le equazioni del sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w - 2t = 0 \\ 3y + 2z - 4w + 2t = 0 \\ 4z - 3w - t = 0 \\ -11w + 8t = 0 \end{cases}$$

Da cui si ha

$$S_0 = \left\{ \left( \frac{95}{132}t, \frac{61}{66}t, \frac{35}{44}t, \frac{8}{11}t, t \right) \right\} = \langle (95, 122, 105, 96, 132) \rangle$$

### Esercizio 3

La retta cercata é intersezione del piano  $\pi_1$  contenente  $s_1$  e  $P$  e del piano  $\pi_2$  contenente  $s_2$  e  $P$ .

Per determinare  $\pi_1$  consideriamo il fascio di asse  $s_1$ :

$$\mathcal{F}_1 : 2x - y + z - 1 + \lambda(x + 3y + 3z + 2) = 0$$

imponendo il passaggio per  $P$  si ha

$$5 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

Quindi  $\pi_1 : 7x + 14y + 16z + 9 = 0$ .

Per determinare  $\pi_2$  consideriamo il fascio di asse  $s_2$ :

$$\mathcal{F}_2 : y - 3z + 4 + \lambda(x - y - 2z) = 0$$

imponendo il passaggio per  $P$  si ha

$$6 + 6\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Quindi  $\pi_2 : -x + 2y - z + 4 = 0$ . La retta cercata ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 7x + 14y + 16z + 9 = 0 \\ -x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

### Esercizio 4

Un piano é perpendicolare all'asse delle  $x$  se i suoi parametri di giacitura sono uguali alle coordinate di un vettore non nullo parallelo all'asse delle  $x$ , quindi  $(1, 0, 0)$ . Pertanto i piani perpendicolari all'asse  $x$  hanno equazione  $x = h$ . Imponendo il passaggio per  $P$  si ottiene  $\pi : x = 1$ . La retta ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

A questo punto é sufficiente mettere a sistema l'equazione del piano con le equazioni parametriche della retta ed eliminare il parametro  $t$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \\ y = -3 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Il punto cercato ha coordinate  $(1, -3, \frac{5}{2})$