Orvieto – 2003/2004
13.01.04 Geometria – Compito B

13 gennaio 2004

1. Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo di equazioni lineari.

$$\begin{cases} x + y + z + t & = & 0 \\ 2x + y - 2z + w + 2t & = & 0 \\ -x + 2y + 2z + w & = & 0 \\ 3x + 5y + 2z + 2w + 4t & = & 0 \end{cases}$$

2. Determinare autovalori ed autovettori della seguente matrice in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ Dire se si tratta di una matrice diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Determinare equazioni cartesiane del piano π passante per il punto $P(2, 1, -1)$, parallelo alla retta s di equazione

$$\begin{cases} x & = & 3 + t \\ y & = & -t \\ z & = & -2 \end{cases}$$

e ortogonale al piano $\pi' : 2x - y - z = 4$.

4. Classificare la conica di equazione omogenea

$$2X^2 + 2XY - 4Y^2 + XT - YT + T^2 = 0$$

e determinarne i punti impropri.

Soluzione compito del 13.01.04 (cenni)

1. Il sistema dato ha matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il rango di questa matrice usando l'algoritmo di Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice dei coefficienti ha rango 3 (tre righe non nulle) e lo spazio delle soluzioni S_0 del sistema ha dimensione 2 (numero delle incognite=5-3=rango). Inoltre il sistema dato é equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ -y-4z+w &= 0 \\ -9z+4w+t &= 0 \end{cases}$$

Questo sistema puó essere risolto per sostituzioni ottenendo

$$\begin{cases} x &= \frac{8}{9}w+\frac{3}{9}t \\ y &= -\frac{12}{9}w-\frac{4}{9}t \\ z &= \frac{4}{9}w+\frac{1}{9}t \end{cases}$$

Dunque $S_0 = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x = \frac{8}{9}w + \frac{3}{9}t, y = -\frac{12}{9}w - \frac{4}{9}t, z = \frac{4}{9}w + \frac{1}{9}t\}$. Essendo

$$(\frac{8}{9}w+\frac{3}{9}t, -\frac{12}{9}w-\frac{4}{9}t, \frac{4}{9}w+\frac{1}{9}t, w, t) = t(\frac{3}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, 0, 1)+w(\frac{8}{9}, -\frac{12}{9}, -\frac{4}{9}, 1, 0)$$

possiamo dire che $S_0 = \langle(\frac{3}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, 0, 1), (\frac{8}{9}, -\frac{12}{9}, -\frac{4}{9}, 1, 0)\rangle$ e siccome gia sappiamo che $\dim S_0 = 2$ possiamo dire che $\{(\frac{3}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, 0, 1), (\frac{8}{9}, -\frac{12}{9}, -\frac{4}{9}, 1, 0)\}$ é una base di S_0.

2. Risolvendo l'equazione caratteristica

$$det(A - \lambda Id) = 0$$

si trovano gli autovalori di A, che sono $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$. Siccome sono tre autovalori distinti di una matrice 3×3 possiamo dire che la matrice é diagonalizzabile. Cerchiamo gli autovalori di autovettore $\lambda = 1$; ció equivale a determinare le terne di numeri reali (x, y, z) tali che:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - z & = & x \\ -3x + 2y - 3z & = & y \\ -x - y & = & z \end{cases}$$

che é equivalente al sistema

$$\begin{cases} x & = & -z \\ y & = & 0 \end{cases}$$

e dunque ha spazio delle soluzioni $V_2 = \{(x,y,z) \,|\, x = -z, y = 0\} = \langle(1, 0, -1)\rangle$. In maniera simile si procede per gli altri autospazi.

3. Siano (a, b, c) i paramteri di giacitura del piano cercato. La retta r ha parametri direttori $(1, -1, 0)$ ed il piano π' ha parametri di giacitura $(2, -1, -1)$. La condizione di parallelismo retta–piano ci dice che $a-b = 0$ e la condizione di ortogonalitá piano–piano ci dice $2a - b - c = 0$. Mettendo a sistema queste due condizioni e risolvendo di ha che π

ha parametri di giacitura (c, c, c). Essendo determinati a meno di un fattore di proporzionalitá possiamo dunque prendere come parametri di giacitura $(1, 1, 1)$. Allora π ha equazione $x+y+z+d=0$ Imponendo il passaggio per P si trova $d=-2$ e quindi $\pi : x+y+z-2=0$.

4. La conica data ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -4 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante $\neq 0$ e pertanto la conica é non degenere. Per determinare i punti impropri mettiamo a sistema l'equazione della conica con l'equazione della retta impropria $T=0$, ottenendo

$$\begin{cases} X^2+XY-2Y^2 & = & 0 \\ T & = & 0 \end{cases}$$

Per risolvere la prima equazione possiamo dividere per Y^2 e porre $\lambda = \frac{X}{Y}$ in modo da ottenere l'equazione di secondo grado in una incognita

$$\lambda^2+\lambda-2=0\,.$$

Tale equazione ha due soluzioni reali $\lambda=1$, $\lambda=-2$ Pertanto la conica é una ellisse di punti impropri $P_1(1, 1, 0)$ e $P_2(-2, 1, 0)$.