Orvieto – 2003/2004
13.01.04 Geometria – Compito A

13 gennaio 2004

1. Determinare una base per lo spazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo di equazioni lineari.

$$\begin{cases} x+y+z+t & = & 0 \\ 2x+y-z-w+3t & = & 0 \\ -2x-2w+t & = & 0 \\ 2x+3y+z-3w+6t & = & 0 \end{cases}$$

2. Determinare autovalori ed autovettori della seguente matrice in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ Dire se si tratta di una matrice diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Determinare equazioni cartesiane del piano π passante per il punto $P(1,-1,0)$, parallelo alla retta s di equazione

$$\begin{cases} x & = & 1+2t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 1-t \end{cases}$$

e ortogonale al piano $\pi : x-y-2z=1$.

4. Classificare la conica di equazione omogenea

$$3X^2-2XY+Y^2-2XT+T^2=0$$

e determinarne i punti impropri.

Soluzione compito del 13.01.04 (cenni)

1. Il sistema dato ha matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il rango di questa matrice usando l'algoritmo di Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice dei coefficienti ha rango 3 (tre righe non nulle) e lo spazio delle soluzioni S_0 del sistema ha dimensione 2 (numero delle incognite=5-3=rango). Inoltre il sistema dato é equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+y+z+t & = & 0 \\ -y-3z-w+t & = & 0 \\ -4z-4w+5t & = & 0 \end{cases}$$

Questo sistema puó essere risolto per sostituzioni ottenendo

$$\begin{cases} x & = & -w+\frac{1}{2}t \\ y & = & 2w-\frac{11}{4}t \\ z & = & -w+\frac{5}{4}t \end{cases}$$

Dunque $S_0 = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x = -w + \frac{1}{2}t, y = 2w - \frac{11}{4}t, z = -w + \frac{5}{4}t\}$. Essendo

$$(-w+\frac{1}{2}t, 2w-\frac{11}{4}t, -w+\frac{5}{4}t, w, t) = t(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1)+w(-1,2,-1,1,0)$$

possiamo dire che $S_0 = \langle(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1), (-1,2,-1,1,0)\rangle$ e siccome gia sappiamo che $\dim S_0 = 2$ possiamo dire che $\{(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1), (-1,2,-1,1,0)\}$ é una base di S_0.

2. Risolvendo l'equazione caratteristica

$$det(A - \lambda Id) = 0$$

si trovano gli autovalori di A, che sono $\lambda = 2$, $\lambda = -1$, $\lambda = 3$. Siccome sono tre autovalori distinti di una matrice 3×3 possiamo dire che la matrice é diagonalizzabile. Cerchiamo gli autovalori di autovettore $\lambda = 2$; ció equivale a determinare le terne di numeri reali (x,y,z) tali che:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -4x - 7y - z &= 2x \\ 3x + 6y + z &= 2y \\ -3x - 3y + 2z &= 2z \end{cases}$$

che é equivalente al sistema

$$\begin{cases} x &= -y \\ z &= -y \end{cases}$$

e dunque ha spazio delle soluzioni $V_2 = \{(x,y,z) \,|\, x = z = -y\} = \langle(1,-1,1)\rangle$. In maniera simile si procede per gli altri autospazi.

3. Siano (a,b,c) i paramteri di giacitura del piano cercato. La retta r ha parametri direttori $(2,1,-1)$ ed il piano π' ha parametri di giacitura $(1,-1,-2)$. La condizione di parallelismo retta–piano ci dice che $2a + b - c = 0$ e la condizione di ortogonalitá piano–piano ci dice $a - b - 2c = 0$. Mettendo a sistema queste due condizioni e risolvendo di ha che π

ha parametri di giacitura $(c, -c, c)$. Essendo determinati a meno di un fattore di proporzionalitá possiamo dunque prendere come parametri di giacitura $(1, -1, 1)$. Allora π ha equazione $x - y + z + d = 0$ Imponendo il passaggio per P si trova $d = -2$ e quindi $\pi : x - y + z - 2 = 0$.

4. La conica data ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante $\neq 0$ e pertanto la conica é non degenere. Per determinare i punti impropri mettiamo a sistema l'equazione della conica con l'equazione della retta impropria $T = 0$, ottenendo

$$\begin{cases} 3X^2 - 2XY + Y^2 & = & 0 \\ T & = & 0 \end{cases}$$

Per risolvere la prima equazione possiamo dividere per Y^2 e porre $\lambda = \frac{X}{Y}$ in modo da ottenere l'equazione di secondo grado in una incognita

$$3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0\,.$$

Tale equazione ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \imath\sqrt{2}}{3}\,.$$

Pertanto la conica é una iperbole di punti impropri $P_{1,2}(1 \pm \imath\sqrt{2}, 3, 0)$.